









GANZZAHLLIGKEITSFRAGEN BEI DER  
HODGE-ZERLEGUNG AUF KOMPAKTEN KÄHLER-MAN-  
NIFALTIGKEITEN INSBESONDERE AUF TORI

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften der Fakultät  
für Mathematik der Ludwig-Maximilians-Univer-  
sität München

vorgelegt von

BALBINO GARCIA BERNAL

aus Bogotá, Kolumbien.

eingereicht am 20. 12. 1985

1. Berichterstatter: Prof. Dr. O. Forster.
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. W. Schuster

Tag der mündliche Prüfung: 5. 3. 1986

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen  
Austauschdienstes

## EINLEITUNG

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Auf  $X$  hat man bekanntlich die Hodgerzerlegung

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{pq}(X, \mathbb{C})$$

wobei

$$H^{pq}(X, \mathbb{C}) = \overline{H}^{qp}(X, \mathbb{C})$$

Die Rolle der Gruppen  $H^{pq}(X, \mathbb{C})$  ist z.B. im Zusammenhang mit der "Theorie der Variation der Hodgesche-Struktur" wichtig (s.z.B. [9],[13],[13a],[13b],[14],[17],[29]).

Sei  $j_n: H^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{C})$  die von der Inklusion  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induzierte Abbildung und  $H^{pq}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{pq}(X, \mathbb{C})$  das Urbild von  $H^{pq}(X, \mathbb{C}) \subset H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ . Es ist leicht zu zeigen, daß

$$H^{pq}(X, \mathbb{Z}) = 0 \quad , \quad p \neq q.$$

Falls  $H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$  torsionsfrei ist. Dann untersucht man die Gruppen  $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$ .

Die Gruppen  $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$  kommen in der Literatur mehrmals vor.

1950 hat Sir William Hodge vermutet: Ist  $X$  eine  $n$  dimensionale projektive komplexe Varietät, dann wird jede ganze Kohomologieklassse vom Typ  $(p,p)$  von einem algebraischen Zyklus mit ganzen Koeffizienten definiert. (s.[19])

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und  $H^n(X, \mathbb{Z})$  torsionsfrei. Ist der Rang über  $\mathbb{Z}$  von  $H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$  gleich der komplexen Dimension von  $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ , dann ist  $X$  projektiv-algebraisch.

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit torsionsfreier Gruppe  $H^*(X, \mathbb{Z})$ . Man definiert

$$K^{pq}(X, \mathbb{Z}) := (H^{pq}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{qp}(X, \mathbb{C})) \cap H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$$

Sei  $Y$  eine reelle kompakte Mannigfaltigkeit, darauf definiert man zwei verschiedene Kählermannigfaltigkeitsstrukturen, dann kann der Rang (über  $\mathbb{Z}$ ) der Gruppen

$$K^{pq}(X, \mathbb{Z})$$

variieren (behauptet in [16] s. 126).

Es ist sinnvoll die Gruppen  $K^{pq}(X, \mathbb{Z})$ ,  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit zu untersuchen.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt dazu beizutragen.

In dem ersten Kapitel sind zunächst einige Ergebnisse aus der Hodge-Theorie zusammengefaßt, die ich in den folgenden Untersuchungen benutzen werde. Danach folgt ein Resümee von bekannten Ergebnissen über die Gruppen  $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$  in Bezug zu den Themen:

- a) Die Hodgesche Vermutung
- b) Unabhängigkeit von  $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$  von der Metrik
- c) Die Néron-Severi Gruppe.

Das zweite Kapitel enthält folgende neuen Ergebnisse.

Sei  $T$  ein  $n$ -dimensionaler komplexer Torus mit der üblichen Metrik, die Gruppen  $H^{pp}(T, \mathbb{Z})$  wurden ausgerechnet.

Sei nun  $X$  eine  $n$ -dimensionale kompakte Kählermannigfaltigkeit mit einer ganzen Kählerform  $\Omega$  und sei  $d < n/2$ . Ist  $H^{dd}(X, \mathbb{Z})$  torsionsfrei, so läßt sich  $H^{dd}(X, \mathbb{Z})$  als Untergruppe von  $H^{n-d, n-d}(X, \mathbb{Z})$  auffassen. Und für den Fall, daß  $X$  eine kompakt orientierte  $n$ -dimensionale Kählermannigfaltigkeit ist, mit  $H^{2n}(X, \mathbb{Z})$  torsionsfrei, beweise ich, daß

$$H^{pp}(X, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom} (H^{n-p, n-p}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

s. Kap, II §1.

Ich gebe einen dreidimensionalen komplexen Torus  $T$  an, der Flächen aber keine Kurve enthält.  $T$  ist nicht projektiv-algebraisch, sonst würde  $T$  bekanntlich Kurven enthalten.

Die Existenz eines solchen Torus ist das Hauptergebnis des 2. Kapitels.

Im Zusammenhang mit der Dualität

$$H^{pp}(T, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom} (H^{n-p, n-p}(T, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

liefert er ein "Gegenbeispiel" zur "ursprünglichen Fassung der Hodge-Vermutung" (s. Kap. I §1) in der Kategorie der kompakten Kählermannigfaltigkeiten.

Am Schluß führe ich noch einige ungeklärte Fragen auf, die ich in diesem Kontext für interessant halte.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Otto Forster für die Stellung des Themas bedanken. Besonders für seine dauernde Ansprechbarkeit

für Diskussionen, die meine Arbeit betrafen.

Ich bedanke mich bei Herrn W. Miltschitzky für seine  
Hilfe mit den sprachlichen Korrekturen.



INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Kapitel I. Der klassische Fall                                                        | 1  |
| §0. Grundlagen                                                                        | 1  |
| §1. Die Hodgesche Vermutung                                                           | 3  |
| §2. Über die Unabhängigkeit von $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$ von der Metrik                | 7  |
| §3. Néron-Severi Gruppe.                                                              | 8  |
| 1. Die Néron-Severi Gruppe eines komplexen Torus.                                     | 8  |
| 2. Die Picard-Zahl                                                                    | 10 |
| 3. Projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten.                                         | 11 |
| 4. Algebraische Dimension und die Picard Zahl.                                        | 12 |
| Kapitel II. Über die Gruppen $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$                                  | 15 |
| §1. Berechnung von einigen Gruppen und Dualitäts-Satz.                                | 15 |
| §2. Ein dreidimensionaler komplexer Torus, der Flächen<br>enthält, aber keine Kurven. | 27 |
| Übungsblatt                                                                           | 48 |
| Literaturhinweise                                                                     | 49 |



## Kapitel I. Der klassische Fall

### §0. Grundlagen

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Mit  $H^n(X, \mathbb{C})$  und  $H^{pq}(X, \mathbb{C})$  bezeichnet man die de Rham-Gruppen bzw. Dolbeault-Gruppen. Auf  $X$  hat man bekanntlich die Hodge-Zerlegung:

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{pq}(X, \mathbb{C})$$

In gewissen Fällen kann man die Dolbeault Gruppen ausrechnen, z.B.  $X = \mathbb{P}_n$  (s.[16]S.118) oder  $X$  ist ein  $n$ -dimensionaler komplexer Torus (s.[28]S.4).

Über die Gruppen  $H^{pq}(X, \mathbb{C})$  ist u.a. bekannt

- i)  $H^{pq}(X, \mathbb{C}) = \overline{H}^{qp}(X, \mathbb{C})$
- ii)  $H^{pq}(X, \mathbb{C}) \cong H^{n-p, n-q}(X, \mathbb{C})$

Sei

$$h^{pq}(X, \mathbb{C}) := \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X, \mathbb{C})$$

Dann

$$\text{iii) } h^{pq}(X, \mathbb{C}) < \infty$$

Außerdem gilt

iv)  $H^{pq}(X, \mathbb{C})$  ist unabhängig von der Metrik,

man kann diese Gruppen durch die Hodgesche Filtrierung definieren, die ohne Bezug auf eine Metrik definiert worden ist.

Sei  $j_n : H^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{C})$  die von der Inklusion  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induzierte Abbildung.

$$\text{Tor}(X) := \text{Ker } j_n$$

Ein Element  $c \in \text{Tor}(X)$  heißt Torsionselement.

Und sei ferner

$$H^{pq}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$$

das Urbild von  $H^{pq}(X, \mathbb{C}) \subset H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ .

Es gilt:

$$H^{pq}(X, \mathbb{Z}) = 0, \quad \text{mod}(\text{Tor}(X)) \quad , \quad p+q$$

Sei  $p+q$  und  $c \in H^{pq}(X, \mathbb{Z})$ , dann ist  $c$  reell,  $c = \bar{c}$  und

$$j_{p+q}(c) \in H^{pq}(X, \mathbb{C}) \cap H^{qp}(X, \mathbb{C}) = 0$$

Daraus folgt die Behauptung

In dem Fall, daß  $M$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit torsionsfreier Gruppe  $H^*(M, \mathbb{Z})$  ist, untersucht man die Gruppen

$$K^{pq}(M, \mathbb{Z}) := (H^{pq}(M, \mathbb{C}) \oplus H^{qp}(M, \mathbb{C})) \cap H^{p+q}(M, \mathbb{Z})$$

insbesondere

$$K^{pp}(M, \mathbb{Z}) = H^{pp}(M, \mathbb{Z})$$

### §1. Die Hodgesche Vermutung

Sei  $X$  eine projektiv-algebraische Varietät. Man versucht die von algebraischen Untervarietäten definierten Kohomologieklassen zu bestimmen.

$X$  bezeichnet auch die zu  $X$  zugeordnete kompakt komplexe Mannigfaltigkeit. Seien nun  $n := \dim_{\mathbb{C}} X$ ,  $0 < q < n$  und  $Y$  eine irreduzible Untervarietät von  $X$ ,  $p := \dim_{\mathbb{C}} Y = n - q$ .  $Y$  definiert einen  $2p$ -Zyklus auf  $X$ , so daß seine Homologieklassse  $y \in H_{2p}(X, \mathbb{Z})$  und die duale Kohomologieklassse  $y \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$  wohldefiniert sind (s. [7]).

Die Kohomologieklassse eines algebraischen Zyklus

$$Z := \sum n_i Z_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

$Z_i$  irreduzible Untervarietät von  $X$ , wird durch Linearität definiert

$$z = \sum n_i z_i$$

Sei  $A^*(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2*}(X, \mathbb{Z})$  die Untergruppe, die von den durch algebraische Zyklen definierten Kohomologieklassen erzeugt wird.

Ist  $z \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$  durch einen algebraischen Zyklus definiert, dann ist  $z$  vom Typ  $(q, q)$ , d.h.  $z \in H^{q, q}(X, \mathbb{Z})$  (s. [16] S. 163)

Es ist bekannt, daß jedes Element  $z \in H^{1, 1}(X, \mathbb{Z})$  zu der von Kohomologieklassen (von algebraischen Zyklus definierten) erzeugten Untergruppe gehört. Das heißt

$$A^1(X, \mathbb{Z}) = H^{1, 1}(X, \mathbb{Z})$$

Das ist der Satz von Lefschetz in  $(1, 1)$  Klassen (s. [16] S. 163).

Bemerkung: Der Beweis von Lefschetz wurde für den Fall  $n = 2$  durchgeführt (s. [25] S. 72). Eine Skizze des Beweises von Lefschetz, nach den klassischen Ideen - aber

in der Sprache der "Theorie der normalen Funktionen" - findet man in [41]. Die Arbeit von Hodge darüber in [19] und [21].

Die ursprüngliche Fassung der Hodgeschen Vermutung (mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ ) kann man so formulieren: Sei  $X$  eine projektiv-algebraische Varietät, dann gilt

$$\text{Hodge}^d(X, \mathbb{Z}) : A^d(X, \mathbb{Z}) = H^{dd}(X, \mathbb{Z}) \quad (0 < d < \dim_{\mathbb{C}} X)$$

Sei  $X$  eine Fahren Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$\text{Hodge}^*(X, \mathbb{Z}), \text{ denn } H^*(X, \mathbb{Z}) = A^*(X, \mathbb{Z}) \quad (\text{s. [35]}).$$

Beispiele von projektiv-algebraischen Varietäten für die  $\text{Hodge}^*(X, \mathbb{Z})$  nicht gilt finden sich in Atiyah, Hirzebruch [1]. Sie zeigten: Es existiert eine projektiv-algebraische Varietät  $X$  und  $u \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$ , so daß  $u \in H^{2q}(X, \mathbb{Z}) \setminus A^q(X)$ . Das Gegenbeispiel in [1] hängt von topologischen Eigenschaften (nämlich Torsion) von  $u \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$  ab. Die Arbeit von Atiyah und Hirzebruch ist auch in [15] kommentiert.

Bemerkung. Ein Vorschlag für ein anderes Gegenbeispiel zu der ursprünglichen Fassung der Hodgeschen Vermutung findet man in [5].

Aufgrund des Gegenbeispiels mußte die Hodge-Vermutung

modifiziert werden. Atiyah und Hirzebruch formulierten sie folgendermaßen: Sei  $X$  eine projektiv-algebraische Varietät. Dann gilt:

$$\text{Hodge } P(X, \mathbb{Q}) : H^{pp}(X, \mathbb{Q}) = A^p(X, \mathbb{Q}) \quad (0 < p < \dim_{\mathbb{C}} X)$$

Dies ist die heutige Fassung der Hodge Vermutung.

Ein ausführlicher Bericht über die Hodge Vermutung findet sich in [35] (siehe auch [3], [4], [10], [18], [23], [26], [32]).

Es gibt kompakt nicht projektiv-algebraische Kählermannigfaltigkeiten  $X$ , für die  $\text{Hodge}^*(X, \mathbb{Q})$  nicht gilt (s. [40]).

In Kapitel II gebe ich ein Beispiel von einem nicht projektiv-algebraischen drei dimensional komplexen Torus  $T$  an, der Flächen aber keine Kurven enthält.  $T$  ist ein Gegenbeispiel für  $\text{Hodge}^*(T, \mathbb{Z})$  und  $\text{Hodge}^*(T, \mathbb{Q})$ .

Bemerkung. Sei  $X$  eine glatte projektive komplexe Mannigfaltigkeit.  $H^p$  die Garbe auf  $X$ , die der Prägarbe  $U \rightarrow H^p(U, \mathbb{Z})$  bzgl. der Zariski Topologie zugeordnet ist. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$Z_a^p(X) \cong H^p(X, H^p)$$

wobei  $Z_a^p(X)$  die Gruppe der Zyklen von Kodimension  $p$  modulo algebraischer Äquivalenz bezeichnet (s.[6]).

## §2. Über die Unabhängigkeit von $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$ von der Metrik

Sei  $K^\bullet$  ein Garbenkomplex, mit Differential  $d$ , auf dem Raum  $X$ . Sei  $\{F^p K^\bullet\}$  die "filtration bête"

$$F^p K^q := \begin{cases} K^q & , q \geq p \\ 0 & , q < p \end{cases}$$

Sei  $X$  eine komplexe projektive Mannigfaltigkeit. Man definiert

$$J^k(X) := H^{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \setminus H^{2k-1}(X, \mathbb{C}) / F^{k+2k-1}(X, \mathbb{C})$$

die  $k$ -te intermediäre Jacobische.

Sei  $X$  eine projektive  $n$  Varietät und  $k$  eine positive ganze Zahl. Der  $k$ -te Deligne-Komplex  $D_X(k)$  ist der Komplex, der mit Grad 0 anfängt

$$\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^{k-1} \rightarrow 0$$

Der  $k$ -te Deligne Gruppe ist

$$D^k(X) := H^{2k}(X, \underline{D}_X(k)^\circ)$$

Bekanntlich existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow J^k(X) \rightarrow D^k(X) \rightarrow H^{kk}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

(s. [12a]S. 274) und dann ist  $H^{kk}(X, \mathbb{Z})$ ,  $X$  eine projektiv-algebraische Varietät, unabhängig von der Metrik, da die Gruppen  $J^k(X)$ ,  $D^k(X)$  unabhängig von einer bestimmten Metrik definiert worden sind.

### §3. Die Néron-Severi-Gruppe

#### 1. Die Néron-Severi-Gruppe eines komplexen Torus

Sei  $Y$  eine kompakte komplexe zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit  $\dim_{\mathbb{C}} Y = n$ . Man definiert  $NS(Y)$ , die Néron-Severi-Gruppe von  $Y$

$$NS(Y) := \text{Im} (H^1(Y, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(Y, \mathbb{Z}))$$

Man identifiziert die Äquivalenzklassen von holomorphen Geradenbündeln auf  $Y$  mit  $H^1(Y, \mathcal{O}^*)$  (s. [39]S.101) und

$c_1(E)$  bezeichnet die erste Chern-Klasse eines holomorphen Geradenbündels  $E \rightarrow Y$ .

Sei nun  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Ein bekannter Satz von Kodaira sagt: Ein Element  $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$  ist genau dann die erste Chern-Klasse eines holomorphen Geradenbündels, wenn  $c$  vom Typ  $(1,1)$  ist, d.h. in  $H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$  liegt (s. [39] S.106).

Nach dem Satz von Lefschetz in  $(1,1)$  Klassen gilt

$$NS(X) = j_2^{-1}(H^{1,1}(X, \mathbb{C}))$$

und dann

$$NS(X)/\text{Torsion} = H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$$

Bemerkung. Sei  $M$  eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit,  $E \rightarrow M$  ein holomorpher Vektorbündel und  $c_p(E)$  die  $p$ -te Chern-Klasse von  $E$ . Dann

$$c_p(E) \in H^{pp}(M, \mathbb{Z})$$

(s. [16] S. 417).

In gewissen Fällen kann man  $H^{11}(X, \mathbb{Z})$  ausrechnen. Seien  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n} \in \mathbb{C}^n$   $\mathbb{R}$ -linear unabhängige Vektoren,  $\gamma_1$  ist als Spaltenvektor betrachtet. Sei  $\Gamma$  das von  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$  erzeugte Gitter und

$$X := \mathbb{C}^n / \Gamma$$

ein  $n$  dimensionaler komplexer Torus. Sei

$$\Pi := (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$$

Dann ist  $NS(X) (=H^{11}(X, \mathbb{Z})$ , da für einen komplexen Torus  $H^*(X, \mathbb{Z})$  torsionsfrei ist) zu den hermitischen Matrizen  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  isomorph mit

$$\text{Im} (\Pi^t A \bar{\Pi}) \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}$$

(s. z.B. [12]).

## 2. Die Picard-Zahl

Sei  $Y$  eine kompakte komplexe zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit  $\dim_{\mathbb{C}} Y = n$ . Man bezeichnet mit  $\rho(Y)$  den Rang über  $\mathbb{Z}$  von  $NS(Y)$ , d.h.

$$\rho(Y) = \text{rk}_{\mathbb{Z}} NS(Y)$$

Da  $NS(Y) = j_2^{-1}(H^{11}(Y, \mathbb{C}))$  gilt  $\rho(Y) \leq h^{11}(Y)$  und  $NS(Y)$  ist eine endlich erzeugte Untergruppe von  $H^2(Y, \mathbb{Z})$ .

In [31] findet man eine Formel um  $\rho(T)$  auszurechnen, wobei  $T$  ein  $n$  dimensionaler komplexer Torus ist.

Bemerkung a) Sei  $X_m^2$  die Fermat Fläche

$$x^m + y^m + z^m + w^m = 0$$

In dem Artikel von Shioda [34] wurde eine Formel für  $\rho(X_m^2)$  ausgerechnet. Aoki und Shioda untersuchen in [2] die Frage nach erzeugenden Elementen von  $NS(X_m^2) \otimes \mathbb{Q}$ . Die Untersuchung nach erzeugenden Elementen von  $NS(X_m^2)$  über  $\mathbb{Z}$  wird nicht in Betrachtung gezogen.

b) In [33] rechnet Shioda die Picard Zahlen gewisser Flächen in  $\mathbb{P}_3$  aus.

### 3. Projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten

Verschiedene Ergebnisse in Lefschetz Theorie (s.[25]) hängen von ganzen topologischen Eigenschaften der

algebraischen Varietäten ab, d.h. von Bedingungen über ganze Zyklen. Für gewisse Kählermannigfaltigkeiten kann man ähnliche Sätze beweisen, z.B. für die von Hodge in 1951 eingeführten und untersuchten Kählermannigfaltigkeiten "of restricted type" (s. [20]) oder, um mit Weil zu sprechen, "Hodgesche Mannigfaltigkeiten" (s.[37]).

Unter einer Hodgeschen Mannigfaltigkeit  $X$  versteht man eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, deren  $(1,1)$  Kähler-Form  $\Omega$  ganz ist.

Der Grund des Erfolgs von Hodge wurde 1954 von Kodaira erklärt. Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit.  $X$  ist eine Hodgesche Mannigfaltigkeit, genau dann, wenn  $X$  projektiv-algebraisch ist (s.[22]).

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Bekanntlich gilt: Ist  $\rho(X) = h^{1,1}(X)$ , dann ist  $X$  projektiv-algebraisch (s. [12]).

#### 4. Algebraische Dimension und Picard-Zahl

Sei  $X$  eine zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit  $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ . Man bezeichnet mit  $M(X)$  den

Körper der auf  $X$  meromorphen Funktionen

Man nennt den Transzendenzgrad des Funktionenkörpers

$$a(X) := \text{tr. deg}_{\mathbb{C}} M(X)$$

die algebraische Dimension von  $X$ .

Bekanntlich gilt:  $a(X) \leq n$  (s. [30]).

$a(X)$  liefert eine notwendige Bedingung um zu entscheiden, ob eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit algebraisch ist.

Sei  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit  $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ . Ist  $X$  algebraisch, dann ist  $M(X)$  isomorph zum Körper der rationalen Funktionen auf  $X$ , daraus folgt  $a(X) = n$

Zwischen  $a(X)$  und  $\rho(X)$  besteht folgendes Verhältnis

$$\rho(X) = 0 \Rightarrow a(X) = 0$$

(s. [12]).

Sei nun  $T$  ein  $n$ -dimensionaler komplexer Torus.

In [31] vergleicht Selder das Verhalten der Invarianten  $\rho(T)$  und  $a(T)$  z.B.: Sei  $0 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 2$ . Es gibt

einen komplexen Torus  $T$  mit  $a(T) = k$ . Es gilt  
 $0 \leq \rho(T) \leq n^2$ , aber für  $n \geq 3$  nicht, daß jede Zahl  
 $0 \leq k \leq n^2$  Picard-Zahl eines geeigneten  $n$ -dimensionalen  
komplexen Torus ist.

In [12] gaben Elencwajg und Forster Beispiele für die mög-  
lichen Paare  $(a(T), \rho(T))$ ,  $T$  ein zweidimensionaler  
komplexer Torus, an.

## Kapitel II. Über die Gruppen $H^{pp}(X, \mathbb{Z})$

### §1. Berechnung von einigen Gruppen und Dualitätssatz.

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit.

$H^{pq}(X, \mathbb{Z})$  ist eine Gruppe, die ein endlicherzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul ist, denn aus

$$H^{pq}(X, \mathbb{Z}) = j_{p+q}^{-1} (H^{pq}(X, \mathbb{C}))$$

folgt

$$\text{rk}_{\mathbb{Z}} H^{pq}(X, \mathbb{Z}) \leq h^{pq}(X) < \infty$$

Bekanntlich liefert

$$(1) \quad H^m(X, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom} (H_m(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}), \quad \omega \mapsto (\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega)$$

einen Isomorphismus.

Analog gilt für eine kompakte Kählermannigfaltigkeit  $X$  mit torsionsfreier Gruppe  $H^*(X, \mathbb{Z})$ , daß

$$(2) \quad H^m(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom} (H_m(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}), \quad \omega \mapsto (\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega)$$

ein Isomorphismus ist. In diesem Fall gilt:

$$H^m(X, \mathbb{Z}) \subseteq H^m(X, \mathbb{C})$$

Zu den Gruppen  $H^*(X, \mathbb{Z})$  liefern [8] und [27] interessante Beiträge.

Sei  $Y$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, dann ist  $H^1(Y, \mathbb{Z})$  torsionsfrei und

$$\begin{aligned} K^{10}(Y, \mathbb{Z}) &= (H^{10}(Y, \mathbb{C}) + H^{01}(Y, \mathbb{C})) \cap H^1(Y, \mathbb{Z}) \\ &= H^1(Y, \mathbb{Z}) \\ &\cong \text{Hom}(H_1(Y, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Sei nun  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 1$ . Es gilt

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

(s. [12b] S. 151). In diesem Fall gilt:

$$K^{10}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

Sei nun  $T$  ein  $n$  dimensionaler komplexer Torus mit der üblichen Metrik. Dazu möchte ich die Gruppen  $H^{pp}(T, \mathbb{Z})$  ausrechnen und gebe zunächst einige Hilfsmittel an.

Sei  $M$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit torsionsfreier Gruppe  $H^*(M, \mathbb{Z})$ . Aus (2) folgt, daß  $H^m(M, \mathbb{Z})$

isomorph zum Vektorraum der harmonischen Formen vom Grad  $m$  mit ganzzahligen Perioden ist.

Bekanntlich gilt, daß  $H^{p,q}(M, \mathbb{C})$  isomorph zum Vektorraum aller harmonischen Formen vom Typ  $(p, q)$  mit konstanten Koeffizienten

$$\omega = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} C_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

ist und dann ist  $H^{p,q}(M, \mathbb{Z})$  isomorph zu den harmonischen Formen vom Typ  $(p, q)$  mit ganzzahligen Perioden.

Sei nun

$$T := \mathbb{C}^n / \Gamma$$

wobei

$$\Gamma := \sum_{v=1}^{2n} \mathbb{Z} \pi_v$$

und  $\pi_v \in \mathbb{C}$  ( $1 \leq v \leq n$ )  $\mathbb{R}$ -linear unabhängig sind.

Sei

$$S_1 := \mathbb{R} / \mathbb{Z}$$

$T$  ist topologisch isomorph zu  $(S_1)^{2n}$ . Die Abbildung

$$(S_1)^{2n} \longrightarrow T$$

$$(\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \longmapsto \xi_1 \pi_1 + \dots + \xi_{2n} \pi_{2n} \pmod{\Gamma}$$

liefert einen topologischen Isomorphismus.

Nach dem Satz von Künneth gilt: Seien

$$1 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{2m} \leq 2n$$

Dann sind die Zyklen

$$z_{v_1 \dots v_m} := \alpha x S_1 x \alpha x \dots x \alpha x S_1 x \dots x S_1 x \alpha x \dots x \alpha x$$

wobei  $S_1$  an den Stellen  $v_1, \dots, v_m$  auftritt;

eine Basis von  $H_m(T, \mathbb{Z})$ , die die Funktionen

$$[0, 1]^m \rightarrow \mathbb{C}^n, (t_1, \dots, t_m) \mapsto t_1 \pi_{v_1} + \dots + t_m \pi_{v_m}$$

parametrisieren.

Bezeichnung. Sei  $0 < q < n$ . Es gibt  $\binom{n}{q}$  verschiedene

Listen  $I = (i_1, \dots, i_q)$  von natürlichen Zahlen mit

$1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ . Wir bezeichnen diese in irgendeinerweise  
 eingeordnete Listen mit  $I_1, \dots, I_{\binom{n}{q}}$

ohne Einschränkung sei  $I_1 \leq \dots \leq I_{\binom{n}{q}}$

Sei nun  $A \in M\left(\binom{n}{q} \times \binom{n}{q}, \mathbb{C}\right)$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \binom{n}{q}}$

$i, j$  können sich dann mit Listen  $I_i, I_j$  oder  $I, J$

$I = (i_1, \dots, i_q)$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$

$J = (j_1, \dots, j_q)$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$

identifizieren und dann  $a_{ij}$  mit  $a_{IJ}$ .

Satz. Sei  $T$  ein  $n$  dimensionaler komplexer Torus mit

der üblichen Metrik.  $T$  läßt sich darstellen als

$$T = \mathbb{C}^n / \Gamma \quad , \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{Z} \pi_i$$

wobei die  $\pi_i = (\pi_{1i}, \pi_{2i}, \dots, \pi_{ni}) \in \mathbb{C}^n$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ) reell unabhängig sind. Dann ist  $H^{q,q}(T, \mathbb{Z})$  isomorph zu der Gruppe der Matrizen

$A \in M \left( \binom{n}{q} \times \binom{n}{q} , \mathbb{C} \right)$ ,  $A = (a_{ij})$ , so daß für jedes

$v_1, \dots, v_{2q} \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{2q} \leq 2n$

gilt

$$\sum_{i,j} a_{I_i I_j} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi_{i_1 \sigma v_1} \pi_{i_2 \sigma v_2} \dots \pi_{i_q \sigma v_q} \bar{\pi}_{j_1 \sigma v_{q+1}} \dots \bar{\pi}_{j_q \sigma v_{2q}}$$

ist eine ganze Zahl, wobei man über alle möglichen

$$1 \leq i, j \leq \binom{n}{q}$$

$\sigma$  Permutation von  $\{v_1, \dots, v_{2q}\}$

summiert .

Beweis.  $H^{q,q}(T, \mathbb{Z})$  ist isomorph zum Vektorraum aller harmonischen Formen vom Typ  $(q, q)$  mit konstanten Koeffizienten

$$\omega = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} a_{i_1 \dots i_q j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_q} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

oder mit Multiindices

$$\omega = \frac{1}{2i} \sum_{I, J} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

wobei

$$I = (i_1, \dots, i_q) \quad , \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

$$J = (j_1, \dots, j_q) \quad , \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$$

so daß für jedes  $\gamma$  der Basis von

$$H_{2q}(T, \mathbb{Z}) \quad \text{gilt :} \quad \int_{\gamma} \omega \in \mathbb{Z}.$$

Man hat dann eine natürliche injektive Abbildung

$$F : H^{qq}(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow M \left( \binom{n}{q} \times \binom{n}{q} , \mathbb{C} \right)$$

$$\omega \longrightarrow (a_{IJ})$$

Das Bild ist gleich der Gruppe der Matrizen:

$A \in M\left(\binom{n}{q} \times \binom{n}{q}, \mathbb{C}\right)$ ,  $A = (a_{IJ})$  und so daß

$$\frac{1}{2i} \int_{z_{v_1} \dots z_{v_{2q}}} \sum a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \in \mathbb{Z}$$

für  $1 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{2q} \leq 2n$

$$\frac{1}{2i} \int_{z_{v_1} \dots z_{v_{2q}}} \sum a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J =$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{I,J} a_{I,J} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi_{i_1 \sigma v_1} \dots \pi_{i_q \sigma v_q} \bar{\pi}_{j_1 \sigma v_{q+1}} \dots \bar{\pi}_{j_q \sigma v_{2q}} ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{2q}$$

$$= \sum_{I,J} a_{I,J} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi_{i_1 \sigma v_1} \dots \pi_{i_q \sigma v_q} \bar{\pi}_{j_1 \sigma v_{q+1}} \dots \bar{\pi}_{j_q \sigma v_{2q}}$$

$\sum_{\sigma}$  bedeutet, daß man über alle Permutationen  $\sigma$  von  $\{v_1, \dots, v_{2q}\}$  summiert. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. (Mit den obigen Bezeichnungen)

$$1) \quad a_{IJ} = (-1)^{q+1} \bar{a}_{JI}$$

Sei  $\omega \in H^{q,q}(T, \mathbb{Z})$ , dann ist  $\omega$  reell,  $\omega = \bar{\omega}$ .

Sei nun

$$\omega = \frac{1}{2i} \sum a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \sum a_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J &= -\frac{1}{2i} \sum \bar{a}_{IJ} d\bar{z}_I \wedge dz_J \\ &= -(-1)^{q^2} \frac{1}{2i} \sum \bar{a}_{IJ} dz_J \wedge d\bar{z}_I \\ &= -(-1)^q \frac{1}{2i} \sum \bar{a}_{JI} dz_I \wedge d\bar{z}_J \end{aligned}$$

Daraus folgt 1)

2) Für  $q = 1$  stimmt der obige Satz mit [12] überein.

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L^{n-p} : H^p(X, \mathbb{C}) &\longrightarrow H^{2n-p}(X, \mathbb{C}) \\ \alpha &\longmapsto \omega^{n-p} \wedge \alpha \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Dabei ist  $\omega = [\Omega]$ ,  $\Omega$  die Kählerform von  $X$ . (s. [39]S. 195 oder [24]).

Sei  $\omega \in H^r(X, \mathbb{Z})$ ,  $\omega' \in H^s(X, \mathbb{Z})$ , dann  $\omega \wedge \omega' \in H^{r+s}(X, \mathbb{Z})$  (s. [36]). Daraus folgt:

Sei  $X$  eine  $n$  dimensionale kompakte Kählermannigfaltigkeit mit einer ganzen Kählerform  $\Omega$  (also ist  $X$  projektiv-algebraisch) und sei  $d < n/2$ . Dann liefert

$$L^{n-2d} : H^{dd}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n-d, n-d}(X, \mathbb{Z})$$

einen, modulo Torsion, injektiven  $\mathbb{Z}$ -Modulhomomorphismus.

Ist insbesondere  $H^{dd}(X, \mathbb{Z})$  torsionsfrei, so läßt sich  $H^{dd}(X, \mathbb{Z})$  als Untergruppe von  $H^{n-d, n-d}(X, \mathbb{Z})$  auffassen.

Sei  $M$  eine kompakt orientierte Mannigfaltigkeit  $\dim_{\mathbb{R}} M = n$ ,  $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z})$ ,  $\beta \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ . Man definiert die Schnittpaarung

$$H_k(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \#(\alpha \cdot \beta)$$

(s. [16]S.52). Das ist eine Bilinearform.

Bekanntlich gilt:

Satz (Poincaré Dualität). Sei  $M$  eine kompakt orientierte Mannigfaltigkeit,  $\dim_{\mathbb{R}} M = n$ . Die Schnittpaarung

$$H_k(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}, (\alpha, \beta) \rightarrow \#(\alpha \cdot \beta)$$

ist unimodular, d.h. es gelten folgende Aussagen:

- 1) Sei  $F: H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Homomorphismus, dann existiert  $\beta \in H_k(M, \mathbb{Z})$ , so daß für alle  $\alpha \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$  gilt:

$$F(\alpha) = \#(\alpha \cdot \beta)$$

- 2) Sei  $\gamma \in H_k(M, \mathbb{Z})$ . Wenn für alle  $\delta \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$  gilt

$$\#(\gamma \cdot \delta) = 0$$

dann ist  $\gamma$  eine Torsionsklasse.

Beweis (s. [16] S. 53)

Sei  $M$  eine kompakt orientierte Mannigfaltigkeit,  $\dim_{\mathbb{R}} M = n$ . Sei  $\sigma \in H_k(M, \mathbb{Z})$ ,  $\tau \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ . Seien  $\alpha \in D^{n-k}(M)$ ,  $\beta \in D^k(M)$  geschlossene Formen auf  $M$ , so daß

$$\begin{aligned} \forall \mu \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \quad & \left( \int_M \alpha = \#(\sigma \cdot \mu) \right) \\ \forall \nu \in H_k(M, \mathbb{Z}) \quad & \left( \int_M \beta = \#(\tau \cdot \nu) \right) \end{aligned}$$

Dann

$$\# (\sigma \cdot \tau) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

(s. [16] S. 59).

Daraus folgt: Sei  $X$  eine kompakt orientierte  $n$  dimensionale Kählermannigfaltigkeit mit torsionsfreier Gruppe  $H^*(X, \mathbb{Z})$ :

$$H^{2p}(X, \mathbb{Z}) \times H^{2(n-p)}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

ist nicht ausgeartet, d.h. zu jedem  $0 \neq \omega \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$  existiert  $\omega' \in H^{2(n-p)}(X, \mathbb{Z})$ , mit  $\omega \wedge \omega' \neq 0$  und umgekehrt (siehe auch [27] S. 216).

Wähle speziell  $\omega$  vom Typ  $(p, p)$

$$\omega' = \omega^{n-p, n-p} + \tilde{\omega}$$

wobei  $\tilde{\omega}$  eine Summe von Formen anderen Typs bezeichnet

$$\omega \wedge \omega' = \omega \wedge \omega^{n-p, n-p} + \omega \wedge \tilde{\omega}$$

und  $\omega \wedge \omega' \neq 0$ , da  $\omega \wedge \tilde{\omega}$  von anderem Typ ist. Dann

$$H^{p,p}(X, \mathbb{Z}) \times H^{n-p, n-p}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

ist nicht ausgeartet.

Dann hat man bewiesen:

Dualitätssatz. Sei  $X$  eine kompakt orientierte  $n$  dimensionale Kählermannigfaltigkeit mit torsionsfreier Gruppe  $H^*(X, \mathbb{Z})$ . Dann

$$H^{p,p}(X, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H^{n-p, n-p}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

Das ist der Fall z.B. wenn  $X$  einen  $n$  dimensionalen komplexen Torus bezeichnet.

§2. Ein dreidimensionaler komplexer Torus, der Flächen enthält, aber keine Kurven.

1) Ich werde zeigen, daß es einen dreidimensionalen nicht projektiv-algebraischen komplexen Torus  $X$  gibt, der Flächen enthält, aber keine Kurven.  $X$  ist ein Gegenbeispiel für  $\text{Hodge}^*(X, \mathbb{Z})$  und  $\text{Hodge}^*(X, \mathbb{Q})$ .  
Es gilt

$$H^{1,1}(X, \mathbb{Z}) \cong H^{2,2}(X, \mathbb{Z})$$

Gilt es für  $X$   $\text{Hodge}^*(X, \mathbb{Z})$  dann

$$A^1(X, \mathbb{Z}) \cong A^2(X, \mathbb{Z})$$

aber  $A^1(X, \mathbb{Z}) \neq 0$  und  $A^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ .

2.) Sei  $X$  ein dreidimensionaler komplexer Torus.  
 $T$  ein zweidimensionaler komplexer Untertorus von  $X$   
 mit  $a(T) = 0$ . Dann ist  $X/T$  isomorph zu einer elliptischen Kurve  $E$  und  $\pi_1: X \rightarrow E$ ,  $\pi_1$  die Projektion auf die erste Komponente, eine Faserung über  $E$  mit Faser  $T$ .

Nehmen wir an, daß

$$T = \mathbb{C}^2 / \Lambda$$

wobei  $\Lambda$  das von den Spalten einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 4, \mathbb{C})$$

$$\det \text{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

aufgespannten Gitter ist.

$$E = \mathbb{C} / \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \tau_1, \quad \text{Im } \tau_1 > 0$$

und nach einer geeigneten Wahl der Basis ist

$$X \cong \mathbb{C}^3 / \Gamma$$

wobei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^3$  von den Spalten folgender Matrix erzeugt wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau_2 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & \tau_3 & c & d \end{pmatrix} \in M(3 \times 6, \mathbb{C})$$

wobei  $(\tau_2, \tau_3) \in \mathbb{C}^2$ .

Sei

$$Y := \mathbb{C} / \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \gamma', \quad \text{Im } \gamma' > 0$$

und  $\alpha: Y \rightarrow E$  eine holomorphe surjektive Funktion,  
o.B.d.A.  $\alpha(0) = 0$ , d.h.

$$\alpha \in \mathbb{C}^* (\alpha(\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \gamma') \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \tau_1)$$

Man bezeichnet mit  $Y \times_E X$  oder  $\alpha^*(X)$  das "pullback"  
von  $X$  bzgl.  $\alpha$ . Bekanntlich

$$\alpha^*(X) = \{ (y, x) \in Y \times X \mid \alpha(y) = \pi_1(x) \}$$

Man hat das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \alpha^*(X) & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & E \end{array}$$

Lemma 1: Sei  $C$  eine Kurve in  $X$ . Dann ist  $C$  ein eindimensionaler komplexer Torus.

Beweis. O.B.d.A. nimmt man an, daß  $C$  irreduzibel ist, "+" bezeichnet die Addition in  $X$ .

$$X \times X \supseteq C \times C \longrightarrow C + C \subseteq X$$

$C + C$  ist eine analytische irreduzible Teilmenge von  $X$ .

O.B.d.A. sei angenommen, daß  $0 \in C$  und dann  $C \subseteq C + C$ .

Es gibt zwei Fälle:

Erster Fall:  $\dim_{\mathbb{C}}(C + C) = 1$ . Dann folgt  $C = C + C$

und  $C$  ist ein eindimensionaler komplexer Torus.

Zweiter Fall:  $\dim_{\mathbb{C}}(C + C) = 2$ .  $C + C = T$ , sonst  $C \subseteq T$ .

Dann ist

$$\dim_{\mathbb{C}} ((C+C) \cap \text{Faser}) = 1$$

und es liegt eine Kurve in einer Faser.

Widerspruch, da die Fasern von  $X$  isomorph zu  $T$  sind und  $a(T) = 0$ . Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2. Sei  $B$  ein eindimensionaler komplexer Untertorus von  $X$ . Dann gilt

$$B \times T \cong B \times_E X$$

Beweis. Sei  $k: T \rightarrow \pi_1^{-1}(0)$  ein Isomorphismus und

$$\theta: B \times T \longrightarrow B \times_E X$$

$$(b, (t_1, t_2)) \rightarrow (b, j(b) + k(t_1, t_2))$$

wobei  $j: B \rightarrow X$  die kannonische Injektion bezeichnet.

Man hat

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow j & \downarrow \pi_1 \\ B & \xrightarrow{\quad} & E \end{array}$$

$\alpha = \pi_1 \circ j$

und

$$\begin{array}{ccc}
 B \times_E X & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi_1 \\
 B & \xrightarrow{\alpha} & E
 \end{array}$$

$\theta(b, (t_1, t_2)) \in B \times_E X$ , für jedes  $b \in B$  und  $(t_1, t_2) \in T$ ,  
da

$$\begin{aligned}
 \pi_1(j(b) + k(t_1, t_2)) &= \alpha(b) + \pi_1 \circ k(t_1, t_2) \\
 &= \alpha(b) + 0
 \end{aligned}$$

Es ist klar, daß  $\theta$  holomorph und bijektiv ist.

$$\theta^{-1} : B \times_E X \longrightarrow B \times T$$

$$(b, (t_1, t_2, t_3)) \longrightarrow (b, k^{-1}((t_1, t_2, t_3) - j(b)))$$

ist auch holomorph. Damit ist der Beweis vollständig.

Sei  $\tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{C}^3$  so ausgewählt, daß  $\alpha^*(X)$  kein Produkt ist, wobei  $\alpha: Y \rightarrow E$  eine beliebige holomorphe surjektive Abbildung (o.B.d.A.  $\alpha(0) = 0$ ) ist. Die Existenz solcher  $\tau$  wird in 3) und 4) bewiesen. Von diesen wählt man ein festes  $\tau$  aus.  $X$  enthält

Flächen aber keine Kurven. Sei  $e \in E$ , dann ist  $\pi_1^{-1}(e) \subseteq X$  eine Fläche. Sei  $C$  eine Kurve in  $X$ , dann ist  $C$  ein eindimensionaler komplexer Torus und  $C \times_E X$  ist ein Produkt. Dies ist Widerspruch zur Wahl von  $X$ .

3) Wir fixieren einige Bezeichnungen.

Sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C}), \det \operatorname{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

$$( \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-2} & \sqrt{-5} \\ \sqrt{-3} & \sqrt{-7} \end{pmatrix} )$$

$\tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{C}^3$ ,  $\operatorname{Im} \tau_1 > 0$ ,  $\tau_1$  beliebig aber fest.

$$\Pi_\tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau_2 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & \tau_3 & c & d \end{pmatrix} \in M(3 \times 6, \mathbb{C})$$

$\Gamma_\tau$  sei das von den Spalten von  $\Pi_\tau$  aufgespannte Gitter in  $\mathbb{C}^3$  und

$$X := \mathbb{C}^3 / \Gamma_\tau$$

Wir wollen folgende Aussage beweisen:

Hilfssatz. Mit den Bezeichnung von oben gilt: zu vorgegebenen  $\tau_1$  und  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  existieren viele  $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{C}^2$  (d. h. für ein festes  $\tau_1 \in \mathbb{C}$  -bzw.  $\tau_2 \in \mathbb{C}$  -bis auf abzählbar viele Werte von  $\tau_1$  -bzw.  $\tau_2$  -) mit folgender Eigenschaft: Ist  $Y$  eine elliptische Kurve und  $\beta: Y \rightarrow E$  eine Holomorphe surjektive Abbildung, so ist  $\beta^*(X_{\tau_1})$  kein Produkt.

Beweis. Um die Idee des Beweises besser hervortreten zu lassen, behandeln wir zunächst den Fall  $Y = E, \beta = \text{id}$ .

Sei nun

$$Q_1 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$P_{\tau_1, 1} := \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \hline \tau_2 & & \\ \tau_3 & & Q_1 \end{array} \right)$$

$$p_2 \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \text{Im } p_2 > 0$$

$$Q_2 \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \det \text{Im } Q_2 \neq 0$$

$$P_2 := \left( \begin{array}{c|cc} p_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & Q_2 \end{array} \right)$$

$$\tilde{\Pi}_{\tau,1} := (1 \ P_{\tau,1}) \in M(3 \times 6, \mathbb{C})$$

$$\tilde{\Pi}_2 := (1 \ P_2) \in M(3 \times 6, \mathbb{C})$$

$\tilde{\Gamma}_{\tau,1}$  - bzw.  $\tilde{\Gamma}_2$  - sei das von den Spalten von

$\tilde{\Pi}_{\tau,1}$  - bzw.  $\tilde{\Pi}_2$  - erzeugte Gitter in  $\mathbb{C}^3$ .

$$T_{\tau,1} := \mathbb{C}^3 / \tilde{\Gamma}_{\tau,1} \quad (= X_{\tau})$$

$$T_2 := \mathbb{C}^3 / \tilde{\Gamma}_2$$

Ist  $T_{\tau,1}$  ein Produkt, so haben wir einen Isomorphismus

$\alpha: T_{\tau,1} \longrightarrow T_2$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} T_{\tau,1} & \xrightarrow{\alpha} & T_2 \\ \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & E & \end{array}$$

kommentiert, wobei  $\text{pr}_1$  die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet. Dem  $\alpha$  entspricht eine lineare Abbildung  $A: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^3 \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

kommentiert. Daraus folgt:

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & & \\ a_2 & & \tilde{A} \end{array} \right), \quad A \in GL(3, \mathbb{C})$$

und es existiert

$$B = \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) \in SL(6, \mathbb{Z})$$

so daß

$$(3.1) \quad \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & Q_1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = A \left( \begin{array}{c|cc} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & Q_2 \end{array} \right)$$

wobei

$$\left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{16} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline b_{31} & \dots & b_{33} & b_{34} & \dots & b_{36} \\ \hline b_{41} & \dots & b_{43} & b_{44} & \dots & b_{46} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline b_{61} & \dots & b_{63} & b_{64} & \dots & b_{66} \end{array} \right]$$

Aus (3.1) folgt:

$$B_{11} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & Q_1 \end{array} \right) B_{21} = A$$

und

$$(3.2) \quad B_{12} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & \Omega_1 \end{array} \right) B_{22} = A \left( \begin{array}{c|cc} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \Omega_2 \end{array} \right)$$

Dann

$$B_{12} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & \Omega_1 \end{array} \right) B_{22} = \left( B_{11} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & \Omega_1 \end{array} \right) B_{21} \right) \left( \begin{array}{c|cc} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \Omega_2 \end{array} \right)$$

Sei  $R$  die erste Spalte von

$$B_{12} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & \Omega_1 \end{array} \right) B_{22}$$

und  $S$  die erste Spalte von

$$B_{11} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & \Omega_1 \end{array} \right) B_{21}$$

dann

$$R = p_2 S$$

d.h.

$$(3.3) \quad \begin{pmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & Q_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_{44} \\ b_{54} \\ b_{64} \end{pmatrix} = p_2 \left( \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & Q_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_{41} \\ b_{51} \\ b_{61} \end{pmatrix} \right)$$

Aus (3.2) folgt:

$$p_2 = b_{14} + b_{44} \tau_1$$

insbesondere  $b_{44} \neq 0$ .

Es gilt

$$\left( \begin{array}{c|cc} \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & & \\ \tau_3 & & Q_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

und dann folgt aus (3.3):

$$\begin{pmatrix} b_{24} \\ b_{34} \end{pmatrix} + b_{44} \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + Q_1 \begin{pmatrix} b_{54} \\ b_{64} \end{pmatrix} =$$

$$(b_{14} + b_{44}\tau_1) \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} + b_{41} \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + Q_1 \begin{pmatrix} b_{51} \\ b_{61} \end{pmatrix}$$

insbesondere

$$(3.3) \quad b_{24} + b_{44}\tau_2 + ab_{54} + bb_{64} =$$

$$(b_{14} + b_{44}\tau_1) (b_{21} + b_{41}\tau_2 + ab_{51} + bb_{61})$$

Da es nur abzählbar viele  $\tau_2$  gibt, die (3.4) erfüllen, da  $\text{Im } p_2 > 0$ , gibt es ein  $\hat{\tau}_2 \in \mathbb{C}$ , das (3.4) nicht erfüllt.

4) Wir führen jetzt den Beweis des Hilfssatzes im allgemeinen Fall durch.

Die Bezeichnungen von 2) und 3) werden weiterhin verwendet.

Sei  $\gamma_1$  die erste Komponente von  $\gamma \in \Gamma_\tau$ .

$$\Gamma' := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \gamma' \quad , \quad \operatorname{Im} \gamma' > 0$$

$$Y := \mathbb{C} / \Gamma'$$

$\beta: Y \rightarrow E$  eine surjektive holomorphe Abbildung.

o.B.d.A.  $\beta(0) = 0$ . Dann gilt:

$$\beta \in \mathcal{C}^* (\beta(\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \gamma') \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \tau_1)$$

sei

$$\Sigma_{\tau, \beta} := \{ \gamma \in \Gamma_\tau \mid \frac{\gamma_1}{\beta} \in \Gamma' \}$$

$$X_{\tau, \beta} := \mathbb{C}^3 / \Sigma_{\tau, \beta}$$

Man definiert:

$$\delta: X_{\tau, \beta} \rightarrow X_\tau, [(x_1, x_2, x_3)]_{\Sigma_{\tau, \beta}} \longrightarrow [(x_1, x_2, x_3)]_{\Gamma_\tau}$$

$$\eta: X_{\tau, \beta} \rightarrow Y, [(x_1, x_2, x_3)]_{\Sigma_{\tau, \beta}} \longrightarrow \left[ \frac{x_1}{\beta} \right]_{\Gamma'}$$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\tau, \beta} & \xrightarrow{\delta} & X_{\tau} \\
 \eta \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 Y & \longrightarrow & E
 \end{array}$$

kommutiert und  $X_{\tau, \beta} \cong \beta^*(X_{\tau})$

Sei nun

$$\Gamma := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \tau_1$$

Aus  $\beta\Gamma' \subseteq \Gamma$  folgt:

$$\exists r, s, t, u \in \mathbb{Z} ((\beta = r + s\tau_1) \wedge (\beta\gamma' = t + u\tau_1))$$

Sei nun

$$\tilde{\eta}_{\tau, \beta} := \left[ r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \middle| t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{array} \right]$$

$\tilde{\eta}_{\tau, \beta} \in M(3 \times 6, \mathbb{C})$  und weiter sei  $\tilde{\Sigma}_{\tau, \beta}$  das von den

Spalten von  $\tilde{\Pi}_{\tau, \beta}$  aufgespannten Gitter in  $\mathbb{C}^3$ .

$$\tilde{X}_{\tau, \beta} := \mathbb{C}^3 / \tilde{\Sigma}_{\tau, \beta}$$

Dann gilt :  $X_{\tau, \beta} \cong \tilde{X}_{\tau, \beta}$  . Nach Vereinbarung sei

$$\tilde{X}_{\tau, \beta} = \beta^*(X_{\tau})$$

Sei

$$\tilde{Q}_{\tau, \beta} := \left( r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\tilde{P}_{\tau, \beta} := \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{array} \right)$$

$$P_2 := \left( \begin{array}{c|cc} p_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & Q_2 & \\ 0 & & \end{array} \right)$$

$\sum$  das von den Spalten von  $(I \ P_2) \in M(3 \times 6, \mathbb{C})$  aufgespannten Gitter und

$$T_2 := \mathbb{C}^3 / \mathbb{Z}$$

Ist  $X_{\tau, \beta}$  ein Produkt, so haben wir einen Isomorphismus

$a : X_{\tau, \beta} \longrightarrow T_2$ , wobei

$$\begin{array}{ccc} X_{\tau, \beta} & \xrightarrow{a} & T_2 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_1 \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

kommutiert und  $p_1$  die Projektion auf die erste Komponente ist. Dem  $a$  entspricht eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^3 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_1 \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

wobei

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & \tilde{A} & \\ a_2 & & \end{array} \right) \in GL(3, \mathbb{C})$$

Es existiert

$$B = \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) \in \text{Sl}(6, \mathbb{Z})$$

so daß

$$(\tilde{Q}_{\tau, \beta} \quad \tilde{P}_{\tau, \beta}) \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = A (I \quad P_2)$$

und dann

$$\tilde{Q}_{\tau, \beta} B_{11} + \tilde{P}_{\tau, \beta} B_{21} = A$$

$$(4.1) \quad \tilde{Q}_{\tau, \beta} B_{12} + \tilde{P}_{\tau, \beta} B_{22} = AP_2 = \left( p_2 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \tilde{A} & Q_2 \end{array} \right)$$

Daraus folgt

$$(4.2) \quad \tilde{Q}_{\tau, \beta} B_{12} + \tilde{P}_{\tau, \beta} B_{22} = (\tilde{Q}_{\tau, \beta} B_{11} + \tilde{P}_{\tau, \beta} B_{21}) P_2$$

und dann folgt aus (4.1), daß

$$(r + s \tau_1) b_{14} + (t + u \tau_1) b_{44} = p_2$$

oder

$$r b_{14} + t b_{44} + (s b_{14} + u b_{44}) \tau_1 = p_2$$

insbesondere

$$s b_{14} + u b_{44} = 0$$

Sei nun  $V$  die erste Spalte von

$$\tilde{Q}_{\tau, \beta} B_{12} + \tilde{P}_{\tau, \beta} B_{22}$$

und  $W$  die erste Spalte von

$$\tilde{Q}_{\tau, \beta} B_{11} + \tilde{P}_{\tau, \beta} B_{21}$$

dann ist

$$V = p_2 W$$

und aus (4.2) folgt, daß

$$\tau_2 (s b_{14} + u b_{44}) + a b_{54} + b b_{64} + b_{24} =$$

$$(s \tau_2 b_{11} + b_{21} + u \tau_2 b_{41} + a b_{51} + b b_{61}) p_2$$

oder

$$\tau_2 [ (s b_{14} + u b_{44}) - (s b_{11} + u b_{41}) p_2 ] + a b_{54} +$$

$$+ b b_{64} + b_{24} = (b_{21} + a b_{51} + b b_{61}) p_2$$

und

$$s b_{14} + u b_{44} = (s b_{11} + u b_{41}) p_2$$

da  $\text{Im } p_2 > 0$ . Dann gibt es nur abzählbar viele  $\tau_2 \in \mathbb{C}$ , die eine solche Gleichung erfüllen können.

Da  $\beta: Y \rightarrow E$  durch die ganzen Zahlen  $r, s, t, u$  determiniert ist, gibt es nur abzählbar viele solcher  $\beta$ . Deshalb gibt es bei festem  $\tau$  nur abzählbar viele  $X_{\tau, \beta}$ ; insbesondere existiert ein  $\gamma_2 \in \mathbb{C}$ , so daß für keine holomorphe surjektive Abbildung  $\beta: Y \rightarrow E$ ,  $\beta^*(X_\tau)$  ein Produkt ist.

Übungsblatt.

Sei  $X$  eine  $n$  dimensionale kompakte Kählermannigfaltigkeit.

- 1) Man entscheidet ob

$$H^{pq}(X, \mathbb{Z}) \cong H^{n-p, n-q}(X, \mathbb{Z})$$

- 2) Ist  $H^{pq}(X, \mathbb{Z})$  im allgemeinen unabhängig von der Metrik?

- 3) Berechnung von

$$(H^{pq}(X, \mathbb{C}) + H^{qp}(X, \mathbb{C})) \cap H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$$

und ihres Ranges über  $\mathbb{Z}$ .

- 4) Sei  $Y$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit.  
Dann

$$H^{pq}(X \times Y, \mathbb{C}) = \sum_{r,s} H^{p-r, q-s}(X, \mathbb{C}) \otimes H^{r,s}(Y, \mathbb{C})$$

(s. [11] S. 13). Was gilt für  $H^{pq}(X \times Y, \mathbb{Z})$ ?

- 5) Man findet einen drei dimensional komplexen Torus, der Kurven enthält aber keine Flächen.

LITERATUR

- [1] Atiyah, M. F. und Hirzebruch, F.:  
"Analytic cycles on complex manifolds". Topology  
Vol. 1 (1961) 25-45.
- [2] Aoki, N. und Shioda, T.:  
"Generators of the Néron-Severi Group of a Fermat  
Surface" in "Arithmetic and Geometry. Papers dedicated  
to I.R. Shafarevich on the occasion of his 60. Birth-  
day". Vol. 1 Arithmetic Progress in Mathematics  
Vol. 35 Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart (1983) 1-12.
- [3] Aoki, N.:  
"On some Arithmetic Problems related to the Hodge  
Cycles on the Fermat Varieties". Math. Ann. 266  
(1983) 23-54.
- [4] Aoki, N.:  
"(Erratum) On some Arithmetic Problems related to  
the Hodge Cycles on the Fermat Varieties". Math. Ann. 267  
(1984) 572.
- [5] Barton, C. und Clemens, C.H.:  
"A result on the integral Chow ring of a generic  
principally polarized complex abelian variety of  
dimension four". Compositio Math. Vol. 34. Fasc. 1  
(1977) 49-67.
- [6] Bloch, S. und Ogus, A.:  
"Gersten's Conjecture and the homology of Schemes"  
Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série, t. 7 (1974)  
181-202.

- [7] Borel, A. und Haefliger, A.:  
"La classe d'homologie fondamentale d'un espace  
analitique". Bull. Soc. Math. France 89 (1961)  
461-513
- [8] Bott, R. und Tu, Loring, W.:  
"Differential Forms in Algebraic Topology"  
Springer Verlag, New York 1982
- [9] Carlson, J., Green, M., Griffiths, P., und Harris, J.:  
"Infinitesimal Variations of Hodge Structure (I)"  
Compositio Math. Vol.50 (1983) 109-205.
- [10] Conte, A. und Murre, J.P.:  
"The Hodge Conjecture for Fano complete intersections  
of dimension four" in "Journées de géométrie  
algébrique d'Angers 1979" Sijkhoff & Noordhoff,  
Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Rockville,  
Maryland, USA (1980) 129-141.
- [11] Cornalba, M. und Griffiths, P.:  
"Some transcendental aspects of algebraic geometry"  
in "Algebraic Geometry, Arcata 1974" Proc. Symp.  
Pure Math. 29 (1975) 3-110.
- [12] Elencwajg, G. und Forster, O.:  
"Vector Bundles on manifolds without divisors and  
a theorem on deformations". Ann. Inst. Fourier,  
Grenoble 32, 4 (1982) 25-51.
- [12a] El Zein, F. und Zucker, S.:  
Extendability of normal functions associated to  
algebraic cycles" in Griffiths, P. (Hg.)  
Topics in transcendental algebraic Geometry  
Annals of Mathematics Studies 106 Princeton  
University Press, Princeton N.J.(1984) 269-288.

- [12b] Forster, O.:  
Riemannsche Flächen. Springer Verlag, Berlin,  
Heidelberg, New York 1977 .
- [13] Griffiths, P.:  
"Infinitesimal Variation of Hodge structure (III):  
determinantal varieties and the infinitesimal in-  
variant of normal functions". Compositio Math.  
Vol. 50 (1983) 267-324.
- [13a] Griffiths, P.:  
"Variation of Hodge Structure" in Griffiths, P.  
(Hg) Topics in transcendent algebraic Geometry.  
Princeton University Press, Princeton N.J.(1984)  
3-28.
- [13b] Griffiths, P.:  
"Infinitesimal Variation of Hodge Structure"  
in Griffiths, P. (Hg) Topics in transcendental  
algebraic Geometry. Princeton University Press,  
Princeton N.J. (1984) 51-61.
- [14] Griffiths, P.:  
"IVHS and the generic global Torelli Problem"  
in Griffiths, P. (Hg) "Topics in trascendental  
Algebraic Geometry" Annals of Mathematics Studies  
106. Princeton University Press, Princeton N.J.  
(1984) 227-237.
- [15] Griffiths, P. und Adams, J.:  
"Topics in algebraic and analytic geometry"  
Princeton University Press and University of  
Tokyo Press. Princeton, N.J. 1974

- [16] Griffiths, P. und Harris, J.:  
"Principles of Algebraic Geometry" Wiley 1978
- [17] Griffiths, P. und Harris, J.:  
"Infinitesimal Variations of Hodge Structure (II):  
An infinitesimal invariant of Hodge classes"  
Compositio Math. Vol. 50 (1983) 207-265.
- [18] Hazama, F.:  
"Algebraic Cycles on Abelian Varieties with many  
real endomorphisms". Tohoku Math. Journal 35  
(1983) 303-308.
- [19] Hodge, W.V.D.:  
"The topological invariants of Algebraic Varieties"  
Proc. Int. Congr. Math., (1950) 182-192.
- [20] Hodge, W.V.D.:  
"A special type of Kähler manifold"  
Proc. London Math. So. (3) 1 (1951) 104-117.
- [21] Hodge, W.V.D.:  
"Professor Lefschetz's contributions to algebraic  
geometry: an appreciation" in "Algebraic Geometry  
and Toplogy. A Symposium in honor of S. Lefschetz"  
Princeton Univ. Press. Princeton N.J. (1957) 3-23.
- [22] Kodaira, K.:  
"On Kähler Varieties of restricted type"  
Ann. of Math. 60 (1954) 43-76.
- [23] Kumar Murty, V.:  
"Exceptional Hodge classes on certain Varieties"  
Math. Ann. 268 (1984) 197-206.

- [24] Lamotke, K.:  
"The topology of complex projective varieties after  
S. Lefschetz" Topology Vol. 20, 15-51.
- [25] Lefschetz, S.:  
"L'Analysis situs et la géométrie algébrique".  
Gauthier-Villars, Paris (1924).
- [26] Lewis, J.D.:  
"The Hodge Conjecture for a certain class of  
Fourfolds". Math. Ann. 268 (1984) 85-90.
- [27] Massey, W.S.:  
"Singular Homology Theory". Springer Verlag,  
New York (1980).
- [28] Mumford, D.:  
"Abelian Varieties". Oxford Univ. Press London  
(1970).
- [29] Peters, C. und Steenbrink, J.H.M.:  
"Infinitesimal variations of Hodge Structure and  
the generic Torelli Problem for projectiv hyper-  
surfaces" in Coalis, J. und Helqason, S. (Hg)  
"Classification of algebraic and analytic  
Manifolds" , Birkhäuser, Boston (1983).
- [30] Remmert, R.:  
"Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen  
Räumen" Math. Ann. 133 (1956) 277-288.
- [31] Selder, E.:  
"Picard Zahlen komplexer Tori"  
Manuscripta Math. 41 (1983) 45-74.

- [32] Shioda, T.:  
"The Hodge Conjecture and the Tate Conjecture  
for Fermat Varieties". Proc. Japan Acad. 55, Ser. A  
(1979) 111-114.
- [33] Shioda, T.:  
"On the Picard Number of a complex projective  
Variety" . Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série,  
t. 14 (1981) 303-321.
- [34] Shioda, T.:  
"On the Picard number of a Fermat surface".  
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I A 28 (1981)  
725-734.
- [35] Shioda, T.:  
"What is known about the Hodge Conjecture?"  
in Advanced studies in Pure Mathematics 1 (1983)  
Algebraic Varieties and Analytic Varieties, 55-68.
- [36] Weil, A.:  
"Sur les Théorèmes de de Rham"  
Comm. Math. Helv. 26 (1952) 119-145.
- [37] Weil, A.:  
"On Picard Varieties" . Am. J. Math. 74 (1952)  
865-894.
- [38] Weil, A.:  
"Introduction à l'Étude des Variétés Kähleriennes"  
Hermann & Cie., Paris 1958 .
- [39] Wells, R.O.:  
"Differential Analysis on complex Manifolds"  
Springer Verlag, New York 1980 .

- [40] Zucker, S.:  
"The Hodge Conjecture for cubic fourfolds".  
Comp. Math. Vol. 34, Fasc 2 (1977) 199-209.
- [41] Zucker, S.  
"Intermediate Jacobians and normal Functions"  
in Griffiths, P. (Hg) "Topics in transcendental  
Algebraic Geometry" Annals Mathematics Studies 106  
Princeton University Press, Princeton N.J. (1984)  
259-267.



## LEBENS LAUF

BALBINO GARCIA BERNAL geboren am 19. 10. 1957 in Bogotá, Kolumbien, als Sohn von Balbino García Bernal und Carlota Bernal de García.

1969-1974: Colegio Mayor de San Bartolomé, Bogotá. 1974 Bachiller

1975-1980: Studium der Mathematik an der "Universidad de los Andes", Bogotá. 1978: " Licenciado en Matemáticas ", 1980: "Magister en Matemáticas". SS 1981-SS 1983: Studium der Mathematik an der Universität Münster, Münster .1983 Diplom-Mathematiker. WS 1983/84-WS 1985/86 Promotion in Mathematik an der Universität München, München.









